【極限的基本運算性質】

若函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的極限存在，設 $\lim_{x\to a} f(x)=l$ ， $\lim_{x\to a} g(x)=m$ ，則

(1) $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=l\pm m$

(2) $\lim_{x\to a} k\cdot f(x)=k\cdot\lim_{x\to a} f(x)=k\cdot l$ (k 為常數)

(3) $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=l\cdot m$

(4) 當 $\lim_{x\to a} g(x)=m\neq 0$ ， $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\dfrac{l}{m}$

Proof of (1)：(addition)

第一步：分析(推測 δ 值)

在任意給定一個正數 ε ，我們想推測 δ 值，使得

$0<|x-a|<\delta \quad\Rightarrow\quad |(f(x)+g(x))-(l+m)|<\varepsilon$ (i)

其中 $|(f(x)+g(x))-(l+m)|=|(f(x)-l)+(g(x)-m)|\le|f(x)-l|+|g(x)-m|$.

若 $|f(x)-l|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 且 $|g(x)-m|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ ，則上式 $|(f(x)+g(x))-(l+m)|\le\varepsilon$.

而由極限定義， $\lim_{x\to a} f(x)=l$ 意即任給一個 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ ，可找到一個 $\delta_1>0$ ，使得

只要 $0<|x-a|<\delta_1$ 一定可推得 $|f(x)-l|<\varepsilon_1$. (ii)

同理對於 $\lim_{x\to a} g(x)=m$ ，亦可推得給一個 $\varepsilon_2=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ ，可找到一個 $\delta_2>0$ ，使得

$0<|x-a|<\delta_2 \;\Rightarrow\; |f(x)-l|<\varepsilon_1$. (iii)

如此，只要 $\delta\le\min(\delta_1,\delta_2)$ ，則(i)即可滿足.

為了方便起見，我們不妨只令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ ，如此一來，隨便你給一個 $\varepsilon>0$ ，

我們都可以得到一個 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$ ，且會滿足(i).

第二步：正式證明

$\forall \varepsilon > 0$ ，$\exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ ，使得 $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ，

$\Rightarrow |x-a| < \delta_1$ 且 $|x-a| < \delta_2$

$\Rightarrow |f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{2}$ 且 $|g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |(f(x)+g(x))-(l+m)| \le |f(x)-l| + |g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ，

故由極限定義，$\lim_{x \to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = l + m$