1-3 戰力檢測

答案 解析詳見 P.70

1. (A)(B)(D) **2.** (D) **3.** 9種 **4.** 定義域$=\{x\mid -5\le x\le 3\}$，值域$=\{y\mid 0\le y\le 4\}$

5. (1) $\{x\mid -3<x<2\}$；(2) $\{y\mid y\ge \frac{2}{5}\}$ **6.** (1) 3；(2) 5；(3) $4x^2-2x+1$；(4) $2x^2+2x+1$

7. (1) $5+\sqrt{3}$；(2) $\{x\mid 1\le x\le 11\}$ **8.** $\{x\mid -1\le x\le 3\}$ **9.** (A)(B) **10.** (1) 0；(2) -1；(3) 2

11. $\{x\mid -3\le x\le -1$ 或 $x=1\}$ **12.** $\{x\mid 0\le x\le 3$，但 $x\ne 1,\ 2\}$

13. (1) 5；(2) 4；(3) $\{x\mid 7<x\le 70\}$ **14.** -2 **15.** $\frac{7x-3}{x+5}$ **16.** (1) 略；(2) $k>4$ 或 $1<k<3$

17. (1) 4，4；(2) 4，10，16，22，28，34，40，46 **18.** $2\sqrt{2}$

19. $\{y\mid \frac{-2-2\sqrt{7}}{3}\le y\le \frac{-2+2\sqrt{7}}{2}\}$ **20.** 略

1-4 戰力檢測

答案 解析詳見 P.74

1. (A)(B)(D) **2.** (B)(D)(E) **3.** (1) $\frac{3}{4}$；(2) 2；(3) -5；(4) $-\frac{1}{3}$；(5) 16；(6) $\frac{1}{2}$；(7) 1；(8) $-\frac{3}{2}$；(9) $-\frac{5}{2}$；(10) -2 **4.** (1) 2；(2) 4；(3) 不存在；(4) 0；(5) 不存在 **5.** 3

6. (1) 1；(2) 不存在 **7.** 0 **8.** (1) 1；(2) 2；(3) 不存在；(4) 否 **9.** (A)(D)

10. (1) 0；(2) 不存在；(3) $\frac{\sqrt[4]{2}}{4}$ **11.** (1) -10；(2) 55 **12.** 1，-2 **13.** -1，1

14. 4，$4\sqrt{2}$ **15.** $-\frac{7}{2}<k<0$ **16.** (1) 是；(2) 否，$x=\pm 1$；(3) 否，$x=1$；(4) 是

17. (1) 4，-1；(2) $(\frac{5}{3},\frac{2}{3})$ **18.** 略 **19.** $\frac{1}{2}$，$\frac{3}{8}$ **20.** $a=-1$，$b=1$，$c=4$，$d=-4$

1-3 戰力檢測 P. 39

Step 1 ▸ 基礎題

1. 作垂直 x 軸的直線若與圖形相交，交點恰為一點的是(A)(B)(D)。

重點回顧 P.29

2. 代入檢查得(D) $y=10\sqrt[3]{P}$ 最為接近，選(D)。

重點回顧 P.29

3. $3^2=9$（種）。

重點回顧 P.29

4. 令 $15-2x-x^2\geq 0$

$\therefore (x+5)(x-3)\leq 0$，$-5\leq x\leq 3$

$\Rightarrow$ 定義域為 $\{x\mid -5\leq x\leq 3\}$，

又 $15-2x-x^2=16-(x+1)^2$

$\because -5\leq x\leq 3 \quad \therefore -4\leq x+1\leq 4$，

$0\leq (x+1)^2\leq 16$，$0\leq 16-(x+1)^2\leq 16$

$\Rightarrow 0\leq f(x)\leq 4$，故值域為 $\{y\mid 0\leq y\leq 4\}$。

重點回顧 P.29，P.30

5. (1) $A=\{x\mid 6-x-x^2>0\}$

$=\{x\mid (x+3)(x-2)<0\}$

$=\{x\mid -3<x<2\}$。

(2) $\sqrt{6-x-x^2}=\sqrt{\frac{25}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}\leq\frac{5}{2}$，

而 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$

$\therefore f(x)\geq\frac{2}{5}$，故 $f(A)=\{y\mid y\geq\frac{2}{5}\}$。

重點回顧 P.29，P.30

6. (1) $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(1)=3$。

(2) $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(3)=5$。

(3) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-1)$

$=(2x-1)^2+(2x-1)+1=4x^2-2x+1$。

(4) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+x+1)$

$=2(x^2+x+1)-1=2x^2+2x+1$。

重點回顧 P.30

7. (1) $f(\frac{5}{2})+f(4)+f(10)$

$=[\frac{5}{2}]+(-4+7)+\sqrt{10-7}$

$=5+\sqrt{3}$。

(2) $f(x)$ 的定義域為 $\{x\mid 1\leq x\leq 11\}$。

重點回顧 P.30

P. 40

8. (i) $1\leq x\leq 2$ 時，$f(x)=2(2-x)-1=-2x+3$

$\Rightarrow -1\leq f(x)\leq 1$。

(ii) $2\leq x\leq 4$ 時，$f(x)=2(x-2)-1=2x-5$

$\Rightarrow -1\leq f(x)\leq 3$。

由(i)(ii) $f(x)$ 的值域為 $\{x\mid -1\leq x\leq 3\}$。

重點回顧 P.29

Step 2 ▸ 進階題

9. $A=\{100, 25, 11, 6, 4, 2, 1, 0\}$，有 8 個元素。

選(A)(B)。

重點回顧 P.29

10. (1) $(f\circ g)(-1)=f(g(-1))=f(2)=0$。

(2) $(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(2)=-1$。

(3) $(f\circ g)(a)=f(g(a))=3$

$\Rightarrow g(a)=-1\Rightarrow a=2$。

重點回顧 P.30

11. $x^2-1\geq 0$ ……①

且 $3-2x-x^2\geq 0$ ……②

由①得 $(x+1)(x-1)\geq 0$

$\Rightarrow x\leq -1$ 或 $x\geq 1$ ……③

由②得 $(x+3)(x-1)\leq 0$

$\Rightarrow -3\leq x\leq 1$ ……④

由③④得 $-3\leq x\leq -1$ 或 $x=1$

$\Rightarrow$ 定義域為 $\{x\mid -3\leq x\leq -1$ 或 $x=1\}$。

重點回顧 P.30

12. $3x-x^2\geq 0$ ……①

且 $x^2-3x+2\neq 0$ ……②

由①得 $x(x-3)\leq 0\Rightarrow 0\leq x\leq 3$ ……③

由②得 $(x-1)(x-2)\neq 0\Rightarrow x\neq 1, 2$ ……④

由③④得定義域為 $\{x\mid 0\leq x\leq 3$，但 $x\neq 1, 2\}$。

重點回顧 P.30

13. (1) $f(-73)=f(-73+75)=f(2)=5$。

(2) $(f\circ g)(10)=f(g(10))=f(31)$

$=f(1)=4$。

(3) $0<x\leq 2$ 時，$3<f(x)\leq 5$，

$2<x\leq 5$ 時，$2<f(x)\leq 23$

$\therefore 2<f(x)\leq 23$

故 $(g\circ f)(x)$ 的值域為 $\{x\mid 7<x\leq 70\}$。

重點回顧 P.30

14. $f(\frac{15}{2})=f(-\frac{1}{2}+8)=f(-\frac{1}{2})=-f(\frac{1}{2})$

$=-2$，

$f(59)=f(3+7\times 8)=f(3)$，

$f(805)=(-3+101\times 8)=f(-3)=-f(3)$，

故 $f(\frac{15}{2})+f(59)+f(805)=-2$。

重點回顧 P.30

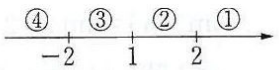
15. 令 $y=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow x=\frac{y+1}{y-1}$，

故 $f(y)=\frac{2\cdot\frac{y+1}{y-1}+5}{3\cdot\frac{y+1}{y-1}-2}=\frac{7y-3}{y+5}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{7x-3}{x+5}$。

重點回顧 P.30

16. (1) 分成 4 段討論：



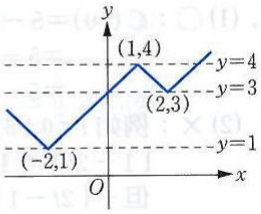
① $x\geq 2$ 時，
$y=(x-2)+(x+2)-(x-1)$
$=x+1$。

② $1\leq x<2$ 時，
$y=(2-x)+(x+2)-(x-1)$
$=-x+5$。

③ $-2\leq x<1$ 時，
$y=(2-x)+(x+2)-(1-x)$
$=x+3$。

④ $x<-2$ 時，
$y=(2-x)+(-x-2)-(1-x)$
$=-x-1$。

由①②③④，
作圖如右。



(2) 直線 $y=k$ 與右圖有 2 個交點
$\Longleftrightarrow k>4$ 或 $1<k<3$

重點回顧 P.29

Step 3 ▶ 精修題

17. (1) $f(4)=4$，$16=6\times 2+4\Rightarrow f(16)=4$。
(2) $f(n)=4$，所以 $n=6k+4$，
但 $n\in\mathbb{N}$，且 $n\leq 50$
$\Rightarrow n=4$，10，16，22，28，34，40，46。

重點回顧 P.29

18. $f(1)\cdot f(1)=2f(1+1)=16\Rightarrow f(1)=4$，
$f(\frac{1}{2})f(\frac{1}{2})=2f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=8$
$\Rightarrow f(\frac{1}{2})=2\sqrt{2}$。

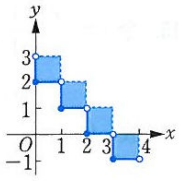
重點回顧 P.30

P. 41

19. 令 $y=\frac{x^2+2x-1}{x^2+x+1}\Rightarrow yx^2+yx+y=x^2+2x-1$
$\Rightarrow (y-1)x^2+(y-2)x+(y+1)=0$。
(i) $y=1$ 時，$x=2$。
(ii) $y\neq 1$ 時 $\because x\in\mathbb{R}$
$\therefore (y-2)^2-4(y-1)(y+1)\geq 0$
即 $\frac{-2-2\sqrt{7}}{3}\leq y\leq\frac{-2+2\sqrt{7}}{3}$。
故 $f(x)$ 的值域為
$\{y\mid\frac{-2-2\sqrt{7}}{3}\leq y\leq\frac{-2+2\sqrt{7}}{3}\}$。

重點回顧 P.30

20. $[x]+[y]=2$，
(i) 當 $0\leq x<1$ 時，$[y]=2$。
(ii) 當 $1\leq x<2$ 時，$[y]=1$。
(iii) 當 $2\leq x<3$ 時，$[y]=0$。
(iv) 當 $3\leq x<4$ 時，$[y]=-1$。
故其圖形如右。



重點回顧 P.29，P.30

1-4 戰力檢測 P. 57

Step 1 ▶ 基礎題

1. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\neq -2 \\ k, & x=-2 \end{cases}$，

不論 k 為何值皆有 $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-3$。

若 $f(x)$ 在 $x=-2$ 連續，

則 $f(-2)=-3$，即 $k=-3$。選(A)(B)(D)。

重點回顧 P.43

2. 令 $f(x)=12x^3-8x^2-23x+11$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-316	-71	14	11	-8	29

$f(x)=0$ 的在 $(-2,-1)$，$(0,1)$，$(1,2)$ 各有一根。

選(B)(D)(E)。

重點回顧 P.43

3. (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+3)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x+3}=\dfrac{3}{4}$。

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$。

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-3)}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to -2}(x-3)=-5$。

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x+2}=-\dfrac{1}{3}$。

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2)-4}$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x+2}+2)$

$=(2+2)(\sqrt{2+2}+2)=16$。

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\dfrac{1}{2}$。

(7) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-1-\sqrt{x^2+1})}{(x-1)^2-(x^2+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-1-\sqrt{x^2+1})}{-2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(x-1-\sqrt{x^2+1})}{2}=1$。

(8) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x^2-x+1})^2-(x+1)^2}{x(\sqrt{x^2-x+1}+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1}=-\dfrac{3}{2}$。

(9) 原式 $=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(x+4)-(3x-2)}{(x+2)(x+4)}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{(x+2)(x+4)}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-3}{x+4}=-\dfrac{5}{2}$。

(10) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(x+1)^2}{x(x+1)^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x-2}{(x+1)^2}=-2$。

重點回顧 P.42

4. (1) 2。

(2) 4。

(3) 不存在 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=5$，但 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$。

(4) 0。

(5) 不存在。

重點回顧 P.42

5. 因 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=3$。

重點回顧 P.42

6. (1) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x}=1$，

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x|}{x}=1$。

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}$，

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在。

重點回顧 P.42

P. 58

7. $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1 \Rightarrow \left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$

$\Rightarrow -|x|\le x\sin\frac{1}{x}\le|x|$

$\because \lim_{x\to0}(-|x|)=\lim_{x\to0}|x|=0$，由夾擠定理

故 $\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}=0$。

重點回顧 P.42

8. (1) $\lim_{x\to2^+}[4-x]=1$

(2) $\lim_{x\to2^-}[4-x]=2$

(3) 不存在。

(4) 否。

重點回顧 P.42，P.43

Step 2 ▶ 進階題

9. (A) ○

(B) ×：可能有偶數個實根

(C) ×：若有偶數個，則 $f(a)f(b)>0$。

(D) ○

選(A)(D)。

重點回顧 P.43

10. (1) 當 x 在 0 附近時，$[x]=0$ 或 -1

$\therefore x$ 在 0 附近時，$-|x|=x[x]\le|x|$

$\because \lim_{x\to0}(-|x|)=\lim_{x\to0}|x|=0$

$\therefore \lim_{x\to0} x[x]=0$

(2) $\frac{x^2-2x}{|x|}=\begin{cases}x-2, & x>0\\ -x+2, & x<0\end{cases}$

$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-2x}{|x|}=2$ 但 $\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-2x}{|x|}=-2$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{x^2-2x}{|x|}$ 不存在

(3) 原式

$=\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{8}}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{8})(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{8})}$

$=\lim_{x\to8}\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{8}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{8}}=\frac{\sqrt[4]{2}}{4}$。

重點回顧 P.42

11. (1) $(x-1)^{10}=x^{10}-C_1^{10}x^9+C_2^{10}x^8-\cdots+C_8^{10}x^2-C_9^{10}x+1$，

$\lim_{x\to0}\frac{(x-1)^{10}-1}{x}$

$=\lim_{x\to0}(x^9-C_1^{10}x^8+C_2^{10}x^7-\cdots-C_9^{10})$

$=-C_9^{10}=-10$。

(2) 原式

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+\cdots+(x^{10}-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots+(x^9+x^8+\cdots+x+1)]$

$=1+2+3+\cdots+10=55$。

重點回顧 P.42

12. $\lim_{x\to1}(ax^2+x+b)=a+1+b=0$，

故 $b=-(a+1)$ ……①

所以 $\lim_{x\to1}\frac{ax^2+x+b}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{ax^2+x-(a+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(ax+a+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(ax+a+1)=2a+1$，

所以 $2a+1=3$ ……②

解①，②得 $a=1$，$b=-2$。

重點回顧 P.42

13. (x^2+ax-6) 有因式 $(x+2)$

$\Rightarrow(-2)^2+a\cdot(-2)-6=0$

$\Rightarrow a=-1$，

$b=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x-6}{2x^2+3x-2}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(2x-1)}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{x-3}{2x-1}=1$。

重點回顧 P.42

14. $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+1}-b)=\sqrt{2}a-b=0$ ……①

所以 $\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=\frac{a}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

$\Rightarrow a=4$ 代入①得 $b=4\sqrt{2}$。

重點回顧 P.42

15. $f(x)=0$ 在 1 與 2 之間有奇數個實根

$\iff f(1)\cdot f(2)<0$

$\iff k\cdot(2k+7)<0$

$\iff -\frac{7}{2}<k<0$。

重點回顧 P.43

16. (1) 是。
(2) 否，在 $x=\pm1$ 不連續。
(3) 否，在 $x=1$ 不連續。
(4) 是。

重點回顧 P.43

17. (1) $f(2)=2^2=4$，
因 $f(x)$ 是連續函數 $\Rightarrow f(-1)=-1$。
(2) 又 $f(2)=2a+b=4$，$f(-1)=-a+b=-1$
解之得 $a=\frac{5}{3}$，$b=\frac{2}{3}$。

重點回顧 P.43

P. 59

18. 令 $F(x)=f(x)-xg(x)=3x^3-x^2-2x-3$
因 $F(1)=-3$，$F(2)=13$，
所以 $F(1)F(2)<0$。
故在 1 與 2 間必有一數 α，使得 $F(\alpha)=0$，
即 $f(\alpha)=\alpha g(\alpha)$。

重點回顧 P.43

Step 3 ▸ 精修題

19. $\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-(1+ax)}{x^2}$

$=\dfrac{(1+x+x^2)-(1+ax)^2}{x^2\left[\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax)\right]}$

$=\dfrac{(1-a^2)x^2+(1-2a)x}{x^2\left[\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax)\right]}$ ……①

$x\to0$ 時①式極限存在

$\Rightarrow 1-2a=0$，故 $a=\frac{1}{2}$，

①式的極限

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{1+x+x^2}+1+\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{2}=\frac{3}{8}$$，

故 $b=\frac{3}{8}$。

重點回顧 P.42

20. $f(x)$有因式 $x-1$ 與 $x+2$，
令 $f(x)=(px+q)(x-1)(x+2)$，
所以 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^2+x-2}$
$=\lim\limits_{x\to1}(px+q)=p+q=1$，

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)}{x^2+x-2}$
$=\lim\limits_{x\to-2}(px+q)=-2p+q=4$，

解之得 $p=-1$，$q=2$，
所以 $f(x)=(-x+2)(x-1)(x+2)$
$=-x^3+x^2+4x-4$，
故 $a=-1$，$b=1$，$c=4$，$d=-4$。

重點回顧 P.42